PROGRAMACIÓN LINEAL PARA ADMINISTRACIÓN

RENZO DEVOTO RATTO
EDUARDO RUIZ VIDAL

EDICIONES UNIVERSITARIAS DE VALPARAÍSO
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Inscripción Nº 133.082

ISBN 956-17-0343-2

Tirada de 300 ejemplares

Ediciones Universitarias de Valparaíso
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Calle 12 de Febrero 187, Valparaíso
Fono (32) 273087 - Fax (32) 273429
euvsa@ucv.cl
www.euv.cl

Diseño Gráfico: Guido Olivares S.
Diagramación: Mauricio Guerra P.
Corrección de Pruebas: Osvaldo Oliva P.

Impreso en Salesianos S.A.

HECHO EN CHILE

A Mónica y Alessandro, amados motivos para perseverar y ganarle a la inercia. A la memoria de Angelo, nuestro ángel de la guarda, que se asoma día a día entre nubes de apacible nostalgia.

A mis padres, Luis y Rina, por la suerte de aún compartir recuerdos y prolongar momentos.

RDR

A mis padres, Eduardo y Ena, en agradecimiento por tantos paseos y conversaciones.

ERV

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a todas aquellas personas e instituciones que cooperaron para que este libro fuera terminado y publicado. Aún corriendo el riesgo de cometer alguna omisión importante, los principales destinatarios de estos agradecimientos son los siguientes:

- Todos los estudiantes que han utilizado algún material de este libro, a lo largo de más de dos décadas. El nivel de aprendizaje alcanzado por cada uno de ellos ha sido uno de los principales incentivos para llevar adelante esta tarea.
- Los ayudantes de los cursos "Investigación de Operaciones" e "Investigación y Administración de Operaciones I" de los distintos planes de estudios de la carrera de Ingeniería Comercial de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, especialmente en la década de los 80. Cada uno de ellos aportó alguna idea interesante para preparar ejemplos y ejercicios. Un agradecimiento muy especial a Gonzalo Reyes Budinich, quien –en su época de ayudante- colaboró intensivamente en la preparación del documento docente que sienta las bases de este libro.
- Los colegas de la Escuela de Ingeniería Comercial de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, por los consejos y por el apoyo moral brindados.
- La Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, por el apoyo financiero prestado para la publicación de este libro, a través del Fondo de Publicaciones.
- El personal de Ediciones Universitarias de Valparaíso, de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, por el trabajo profesional desarrollado.
- Nuestras familias, que adoptaron como propio este proyecto, por todas las horas regaladas con amor para facilitar su consecución.

A todos ellos………, ¡muchas gracias!

LOS AUTORES

PRÓLOGO

Este libro está basado en los apuntes de clases y documentos docentes de los autores, preparados a lo largo de más de 20 años de experiencia impartiendo primero la asignatura "Investigación de Operaciones" y luego la asignatura "Investigación y Administración de Operaciones I", en la carrera de Ingeniería Comercial de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Como tal, su orientación es hacia los estudiantes y profesionales de la Administración y Dirección de Empresas. Por ello, se ha preferido un enfoque con menor rigor matemático de lo que es habitual en este tipo de materias. No obstante, el tratamiento de los temas se realiza en un marco de rigor académico.

Seguramente puede parecer redundante la preparación de un libro de esta especie, en circunstancias que existe una bibliografía muy nutrida en relación al tema de la Programación Lineal.

Al respecto, es obvio que no se pretende realizar un gran aporte al desarrollo de la disciplina, existiendo tantos brillantes autores en este campo. En cambio, se ha formulado el objetivo más modesto de aportar un mayor grado de integración de algunas temáticas, que facilite el aprendizaje y que permita un conocimiento más versátil de la Programación Lineal.

Asimismo, es probable que también parezca irrelevante la preparación de este libro, utilizando el argumento de que los estudiantes y profesionales de la Administración podrían hacer uso de la Programación Lineal, sin necesidad de conocer los fundamentos del modelo y de los algoritmos de resolución, apoyados sólo en una nutrida variedad de eficaces y eficientes programas computacionales ad hoc.

La opinión de los autores es que tal enfoque es altamente riesgoso, por cuanto debido a ello esta rama de la Investigación de Operaciones puede llegar a ser visualizada como una herramienta relativamente simple al lado de otras, pero a la vez muy poderosa, con la consecuente tentación de aplicarla en muchas situaciones en que ello no procede, por parte de personas no calificadas. Sólo un profundo conocimiento de los aspectos teóricos involucrados, permitirá al usuario lograr un adecuado aprovechamiento de esta herramienta y del software disponible. En caso contrario, probablemente la situación será similar a la de una locomotora manejada por un niño.

El libro está dividido en 5 capítulos y contiene 3 apéndices, cuyo contenido general se presenta a continuación.

El Capítulo I, denominado “El modelo de programación lineal”, presenta los aspectos fundamentales del modelo, incluyendo sus supuestos, tras una brevísima mención a la Investigación de Operaciones y a la Programación Matemática. El contenido fundamental del capítulo lo constituye la presentación de una variada gama de formulaciones de problemas de programación lineal (PPL), con la finalidad de que el lector visualice las posibilidades de aplicación y se introduzca a la formulación de modelos.

El Capítulo II, denominado “Métodos de resolución de PPL”, presenta el método Simplex, tanto en la modalidad de Simplex Revisado como en la de Cuadro Simplex. Se pone especial énfasis en alcanzar una adecuada integración entre ambas modalidades, para lo cual se asigna la misma importancia a cada una de ellas y se estudian todas sus interrelaciones más importantes.

El Capítulo III, denominado “Dualidad”, presenta el problema Dual, las relaciones primal dual y algunos aspectos de la interpretación económica de la dualidad. Asimismo, se complementa el tema de resolución de PPL, con la presentación de la importante variante denominada Simplex Dual.

El Capítulo IV, denominado “Análisis de Sensibilidad”, aborda la importante temática del análisis post-optimal, utilizando el conocimiento teórico del método Simplex y de las interrelaciones existentes entre sus distintas variantes. Junto con tratar en forma individual cada una de las modificaciones posibles, se presenta un procedimiento general para tratar cambios simultáneos en más de un parámetro.

El Capítulo V, denominado “Programación Entera”, presenta el problema de programación lineal cuando se agrega como restricción adicional que una o más de sus variables de decisión sólo pueden tomar valores enteros. Aquí se resuelve un ejemplo básico utilizando el algoritmo de ramificación y acotamiento. Lo anterior se complementa con un extenso análisis gráfico.

Todos los capítulos finalizan con la presentación de algunos ejercicios resueltos y con una proposición de ejercicios para trabajo personal, salvo los capítulos I y V, en los cuales sólo se proponen ejercicios. En relación a los ejercicios presentados, no se ha pretendido alcanzar un alto nivel de originalidad, cosa de por sí difícil, prefiriéndose más bien una adecuada selección de ejercicios propios y adaptados de otras fuentes. Todos los ejercicios resueltos de los capítulos II, III y IV y los ejercicios propuestos en los capítulos II y III provienen de pruebas o exámenes preparados ya sea por los autores o por el exprofesor del área de Métodos Cuantitativos de la Escuela de Ingeniería Comercial de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y actual ejecutivo de una importante empresa naviera, señor Rodrigo Vergara Barbagelata, a quien agradecemos su generosa contribución. En otros casos, se han efectuado adaptaciones de ejercicios que ya forman parte de la tradición de la enseñanza de la Investigación de Operaciones, siendo difícil determinar su autoría original.

El Apéndice Nº 1, denominado “Nociones básicas de conjuntos convexos”, presenta en forma muy breve el concepto de conjunto convexo y su relación con la resolución de un sistema de inecuaciones lineales.

El Apéndice Nº 2, denominado “Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales”, comienza con definiciones y operaciones básicas de matrices y vectores, para finalizar con la presentación de algunos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, con énfasis en el método de resolución de Gauss-Jordan, procedimiento integrante del método Simplex.

Como requisito fundamental para lograr un adecuado aprovechamiento de este documento, el estudiante debe contar con nociones fundamentales de matrices y sistemas de ecuaciones lineales, con una perspectiva y profundidad similar a la considerada en el Apéndice Nº 2 ya citado. A aquellos lectores que encuentren dificultades para comprender las bases del algoritmo de resolución Simplex, se les recomienda repasar las materias preseñaladas.

El Apéndice Nº 3, denominado “Nociones de Programación No Lineal”, presenta una breve introducción a la programación matemática, cuando se relaja la exigencia de linealidad para la función objetivo y/o una o más restricciones. Por medio de un ejemplo, se pueden apreciar algunos métodos particulares de resolución para este tipo de problemas.

Se espera que los principales aportes de este libro, para el aprendizaje y aplicación de la Programación Lineal, se encuentren en el tratamiento que se da a algunos temas, en relación al que es habitual en la bibliografía disponible. En tal sentido, se pretende reivindicar la importancia de la modalidad de Simplex Revisado y de sus relaciones con las otras modalidades de método Simplex. Asimismo, se asume una perspectiva integradora, la cual culmina en el tratamiento del tema de análisis de sensibilidad, el cual debiera resultar fácilmente asimilable para cualquier lector que haya comprendido los otros temas tratados.

Finalmente, cabe señalar que es prácticamente imposible que este libro se encuentre exento de errores, especialmente debido a la complejidad del trabajo de digitación, dada la notación utilizada, aunque ha sido exhaustivamente revisado y corregido. En todo caso, los autores asumen toda la responsabilidad por los errores de distinta naturaleza que puedan existir, agradeciendo a los lectores se los hagan notar, para proceder a enmendarlos en futuras ediciones. Asimismo, se agradece todo tipo de sugerencias que puedan mejorar tanto el contenido como la presentación de este libro.

RENZO DEVOTO RATTO
EDUARDO RUIZ VIDAL

Valparaíso, marzo de 2003.

ÍNDICE

Capítulo I

EL MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL

1. LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Desde que, a comienzos del siglo *XX*, Frederick Taylor, Henry Gantt, Frank y Lilian Gilbreth, entre otros, realizaron las primeras aplicaciones del método científico a los problemas de las organizaciones, a la vez que Henry Fayol postuló los principios generales de la administración, podría decirse que la administración de organizaciones dejó de ser una actividad intuitiva.

Mientras más complejas y especializadas se hicieron las organizaciones industriales, los problemas a resolver por los administradores fueron alcanzando una complejidad que no sólo era inherente a la situación bajo análisis, sino también a su interrelación con otros componentes de la organización, lo que reforzó la necesidad de adoptar un punto de vista científico y sistemático para interpretar, analizar y resolver los problemas de empresas e instituciones.

En este contexto se inscribe una disciplina o actividad denominada **Investigación de Operaciones (IO)**, la cual se desarrolló a partir de la Segunda Guerra Mundial, aunque existen trabajos anteriores que podrían situarse en la misma línea. En esa guerra, el problema de asignación efectiva de recursos escasos a las diversas operaciones militares, al igual que la resolución de otros problemas que requerían el análisis de las operaciones militares, dio lugar a la formación de grupos de científicos en Inglaterra y en EE.UU. que realizaron importantes aportes a la resolución de problemas tácticos y estratégicos.

Después de la Segunda Guerra Mundial, lentamente primero y con gran énfasis a partir de la década de 1950, esta disciplina pasó desde el ámbito de las operaciones militares al de las operaciones industriales, siendo reconocida hoy como una actividad fundamental en la administración moderna de organizaciones, así como en otros campos de la actividad humana. Precisamente, el fuerte desarrollo teórico de la Programación Lineal y su rápida y exitosa introducción al campo industrial a partir de la década de 1950, marcó el inicio de una ola de aplicaciones empresariales de otras técnicas y modelos de la IO, que hasta entonces eran conocidos sólo por los especialistas.

Actualmente, la mayor parte de las empresas de los países industrializados utilizan técnicas y modelos específicos de la Investigación de Operaciones, tales como la Programación Lineal, la Programación Entera, la Simulación, la Programación Dinámica, la Teoría de Colas o Modelos de Fenómenos de Espera, los Modelos de Inventarios, las Cadenas de Markov, los Modelos de Secuenciación (CPM, PERT), entre otras.

La siguiente **definición de Investigación de Operaciones** pretende sintetizar los principales aspectos que caracterizan a esta actividad o disciplina:

"La Investigación de Operaciones (IO) es la aplicación del método científico al estudio de los problemas de toma de decisión en situaciones determinísticas o probabilísticas al interior de sistemas complejos, considerando la formulación de un modelo generalmente matemático que permita estudiar el problema y desarrollar una solución que indique el mejor u óptimo curso de acción posible, coherente con los objetivos globales del sistema".

Las dos **características esenciales**, que distinguen a la IO de otras disciplinas o actividades que podrían asimilarse a la anterior definición, son:

i) El modelamiento –generalmente matemático– de los problemas de decisión.

ii) La búsqueda de la mejor o la óptima solución de los problemas de decisión.

Otras características de la IO, aunque no necesariamente esenciales, son la casi ineludible participación de grupos interdisciplinarios y de los computadores en su aplicación. Lo primero proviene del hecho de que los problemas a resolver son habitualmente muy complejos y con consecuencias sobre distintas partes del sistema. Lo segundo proviene del hecho que la resolución de un problema, mediante la IO, requiere habitualmente procesar gran cantidad de datos numéricos.

La **metodología de un estudio de IO** puede ser resumida a través de las siguientes fases:

a) **Formulación del problema:** implica definir objetivos y metas, examinar los recursos internos para lograrlos y los aspectos relevantes del entorno, determinar programas de acción alternativos.

b) **Desarrollo de un modelo para representar el problema que se está estudiando:** "reducir" el problema a una estructura generalmente matemática en la cual se encuentran presentes el o los objetivos y las restricciones explícitas y subyacentes para lograrlos. Esto puede implicar la formulación de varios modelos y su confrontación con la realidad, hasta hallar el más adecuado.

c) **Búsqueda de una solución al problema:** hallar la mejor o la óptima solución para el logro del objetivo, en el marco de las restricciones.

d) **Poner en práctica la solución:** implantar la solución, ya sea a modo de prueba o en forma definitiva.

e) **Establecimiento de controles sobre la solución:** prestar atención a los cambios en la situación, a fin de incorporarlos al modelo ⇒ retroalimentación.

Estas fases no son estrictamente secuenciales, existiendo un límite difuso entre cada una de ellas.

2. LA PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

2.1) EL MODELO GENERAL DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

La Programación Matemática (PM) provee modelos matemáticos asociados con situaciones-problema que involucran decisiones de corto o mediano plazo, en que se intenta optimizar (maximizar o minimizar) un determinado objetivo, pudiendo existir restricciones a las decisiones posibles para lograrlo.

Una aplicación típica de la PM corresponde a situaciones en que se debe asignar un conjunto de recursos limitados entre actividades que compiten por su utilización, existiendo la intención de realizar la asignación de recursos en una forma tal que se maximicen utilidades o se minimicen costos.

Considerando "n" variables de decisión x_j, **el modelo general de PM multidimensional restringida** está compuesto por una "función objetivo" (FO), sujeta a "m" restricciones propias de la situación problema.

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
Opt\ Z = f\left(x_1, x_2, x_{3,} \ldots\ldots, x_n\right) \\
\text{s.a} \\
g_i\left(x_1, x_2, x_{3,} \ldots\ldots, x_n\right) \geq \ \text{ó} \ \leq b_i \\
\qquad\qquad i = 1, 2, 3 \ldots\ldots, m
\end{array}
}
$$

La función objetivo es una representación matemática de la meta total de optimización establecida en términos de las variables de decisión.

El conjunto de las "m" restricciones, expresado en términos de las variables de decisión, es una representación matemática de las condiciones simultáneas que se deben cumplir al establecer los valores para las variables de decisión, como consecuencia de las limitaciones existentes en la situación-problema para el logro del objetivo.

En general, **los modelos más relevantes de la PM** son:

* Modelos de programación lineal
* Modelos de programación no lineal
* Modelos de programación entera

2.2) EJEMPLOS BÁSICOS DE PM Y RESOLUCIÓN GRÁFICA

Ejemplo básico de programación lineal

Para el próximo mes, una empresa desea saber cuántas unidades debe producir y vender de cada uno de sus dos productos principales (A y B). Los dos bienes se producen en dos fases de proceso (I y II) con los siguientes coeficientes técnicos:

Producto	**Proceso I**	**Proceso II**
A	15 hrs/u	20 hrs/u
B	25 hrs/u	12 hrs/u
Cap. máx. próx. mes	75 hrs.	60 hrs.

El beneficio unitario estimado por ventas es de US$ 3.000 y US$ 4.000 para el bien A y el B, respectivamente.

Plantear matemáticamente y resolver gráficamente.

Formulación matemática:

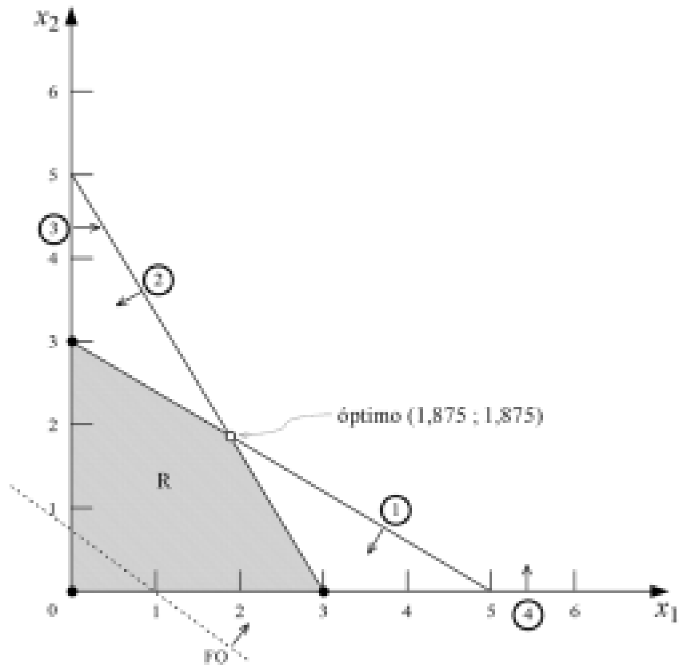
Sean:

x_1 = Nº de unidades/mes a producir y vender de A
x_2 = Nº de unidades/mes a producir y vender de B

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } Z = 3000x_1 + 4000x_2 \\ \text{s.a} \\ 15x_1 + 25x_2 \le 75 \\ 20x_1 + 12x_2 \le 60 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{array}}$$

Resolución gráfica:

En este punto, se recomienda revisar el Apéndice Nº 1, en lo que respecta a resolución gráfica de sistemas de inecuaciones lineales.



La FO Max $Z = 3000x_1 + 4000x_2$ se puede escribir como:

$$4000x_2 = Z - 3000x_1$$
$$x_2 = (Z / 4000) - (3000 / 4000)x_1$$
$$\boxed{x_2 = 0{,}00025Z - 0{,}75x_1}$$

{rectas paralelas con pendiente -3/4 e intercepto 0,00025Z}

R = conjunto convexo de soluciones del sistema de inecuaciones lineales conformado por las restricciones (tales soluciones son las soluciones "realizables" o "factibles").

Solución óptima = $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}875 \\ 1{,}875 \end{bmatrix}$

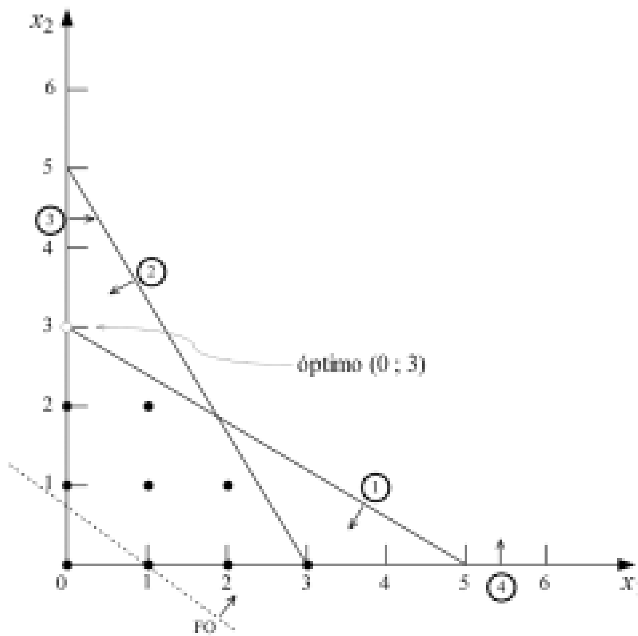
Valor Optimo FO = Z^* = US$ 13.125

Ejemplo básico de programación entera

En el Ejemplo anterior, considerar el caso más realista en que no es posible producir y vender 1,875 unidades de producto, debiendo agregarse la restricción de que tanto x_1 como x_2 deben tener un valor entero.

Resolver gráficamente.

Resolución gráfica:



$$R = \{(0,1);(0,2);(0,3);(0,0);(1,1);(1,2);(2,1);(1,0);(2,0);(3,0)\}$$

Si se aproxima la solución (1,875; 1,875) se tiene el punto (2,2), que es un punto "no realizable" o "no factible".

Algunas posibilidades factibles son:

$$(2,1) \Rightarrow Z = \text{US\$ } 10.000$$
$$(1,2) \Rightarrow Z = \text{US\$ } 11.000$$

pero puede verificarse que el punto óptimo es:

$$(0,3) \Rightarrow Z = \text{US\$ } 12.000$$

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$Z^* = \text{US\$ } 12.000$ Valor óptimo FO

Si bien con el método gráfico no se cometería error, sí se habría cometido error aproximando la solución obtenida sin la restricción de solución entera, lo cual indica que no basta resolver el PPL en el ámbito de los reales y luego arribar a la solución óptima entera por aproximación a números enteros.

Ejemplo básico de programación no lineal

Una empresa monopólica está interesada en optimizar sus resultados económicos en el corto plazo, maximizando su beneficio por período.

Esta empresa produce 2 bienes en forma independiente, con las siguientes funciones de demanda:

$$p_1 = 10 - 0{,}1q_1 \qquad (\Leftrightarrow q_1 = 100 - 10p_1)$$
$$p_2 = 20 - 0{,}2q_2 \qquad (\Leftrightarrow q_2 = 100 - 5p_2)$$

Los coeficientes técnicos para la producción de estos 2 bienes, así como la capacidad máxima de recursos productivos para el próximo período son:

Bien	**Mano de Obra**	**Maquinado**
1	5 hrs-hombre/u	1 hr-máq/u
2	1 hr- hombre/u	2 hrs-máq/u
Cap.Máx	200 hrs-hombre	90 hrs- máquina

Se desea conocer la producción óptima de los bienes 1 y 2 para maximizar el beneficio del próximo período.

Plantear matemáticamente y resolver gráficamente.

<u>Formulación matemática:</u>

Sea $x_1 = q_1$ = Nº unidades a producir y vender de 1

$x_2 = q_2$ = Nº unidades a producir y vender de 2

Se tendría, entonces:

$$\text{Max } Z = p_1\, x_1 + p_2\, x_2 = (10 - 0{,}1x_1)x_1 + (20 - 0{,}2x_2)x_2$$

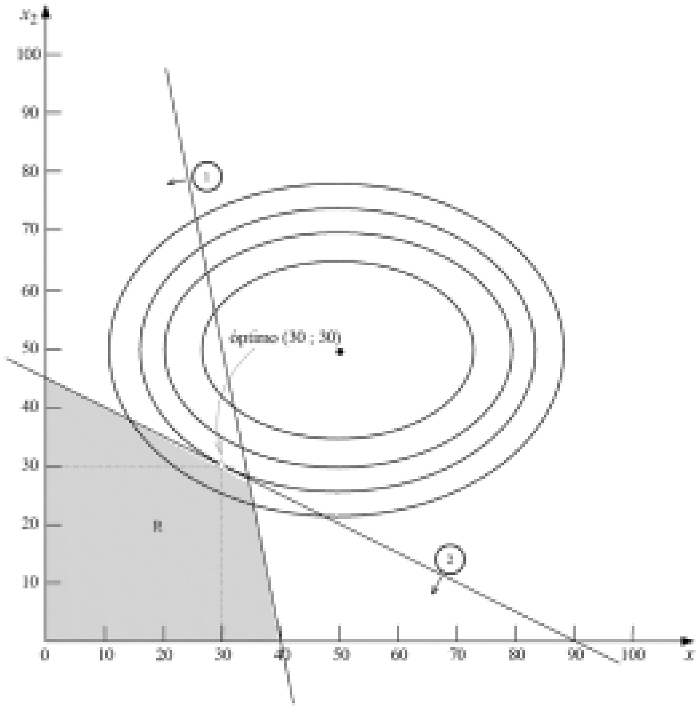
Agregando las restricciones se tendría:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } Z = 10x_1 - 0{,}1x_1^2 + 20x_2 - 0{,}2x_2^2 \\ \text{s.a} \\ 5x_1 + x_2 \le 200 \\ x_1 + 2x_2 \le 90 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}}$$

<u>Resolución gráfica:</u>

La FO es un conjunto de elipses con centro común en (50 ; 50), ya que:

$$Z = -0{,}1\,(x_1 - 50)^2 - 0{,}2\,(x_2 - 50)^2 + 750$$



Por lo tanto, la solución óptima es:

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$Z^* = 630$ Valor Optimo FO

3. EL MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL

3.1) EL MODELO MATEMÁTICO DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Si en el modelo general de Programación Matemática, tanto la función objetivo de optimización como las "*m*" restricciones del problema son lineales y se agregan "*n*" restricciones de no negatividad para las variables de decisión, se tiene el modelo matemático de Programación Lineal:

$$
\begin{array}{l}
\text{Max } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots\cdots + c_n x_n \\
\text{s.a.} \\
\qquad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots + a_{1n} x_n \geq \text{ó} \leq b_1 \\
\qquad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots + a_{2n} x_n \geq \text{ó} \leq b_2 \\
\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
\qquad a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots + a_{mn} x_n \geq \text{ó} \leq b_m \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_j \geq 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad j = 1,2,\cdots,n
\end{array}
$$

En términos matriciales, se tiene:

$$
\begin{array}{l}
\text{Opt } Z = \mathbf{cx} \\
\text{s.a} \\
\quad \mathbf{Ax} \geq \text{ó} \leq \mathbf{b} \\
\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

donde:

$\mathbf{c} = [c_j]_{1\text{x}n}$ = vector-fila de coeficientes de la FO
$\mathbf{x} = [x_j]_{n\text{x}1}$ = vector-columna de variables de decisión
$\mathbf{b} = [b_i]_{m\text{x}1}$ = vector-columna de capacidades en las restricciones
$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\text{x}n}$ = matriz de coeficientes restriccionales

con componentes pertenecientes al campo de los números reales.

Si existiese la condición de que a lo menos una de las variables debiera ser entera, entonces el modelo sería de Programación Lineal Entera.

Cualquiera discrepancia respecto de la linealidad en la FO y/o en las "m" restricciones de problema conduciría a un modelo de Programación No Lineal.

3.2) EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL (PPL)

La Programación Lineal puede ser aplicada en una amplia gama de problemas de decisión, aun cuando existe una cierta tendencia a asociarla erróneamente sólo con problemas de producción.

En esta sección se presenta un variado conjunto de situaciones de decisión, con la finalidad de mostrar algunas de las múltiples aplicaciones de la Programación Lineal. Si bien no se presentan situaciones de alta complejidad, la formulación de estos modelos permite adquirir una adecuada capacitación para emprender posteriormente formulaciones más complejas, que muchas veces corresponden a combinaciones de modelos más sencillos.

Ejemplo Nº 1: (programación de producción en un período)

Para el próximo mes, una empresa manufacturera ha obtenido pedidos correspondientes a sus dos principales productos (A y B), ascendentes a 200 unidades de A y a 300 unidades de B.

Ambos productos son fabricados en dos fases de operación, la primera de las cuales es realizada en el Depto. I y la segunda en cualquiera de los Deptos. II ó III. Los tiempos de proceso por unidad de cada producto en cada fase y/o Depto. son:

Producto	**Depto. I**	**Depto. II**	**Depto. III**
A	2 hrs.	4 hrs.	10 hrs.
B	4 hrs.	7 hrs.	12 hrs.

Para el próximo mes, se cuenta con 1.700 hrs. de proceso en Depto. I, con 1.000 hrs. de proceso en Depto. II y con 3.000 hrs. de proceso en Depto. III. En el Depto. II es posible operar en sobretiempo 500 hrs. adicionales.

Los costos unitarios de operación son de US$ 3, US$ 3 y US$ 2 por hora de proceso dentro de los Deptos. I, II y III, respectivamente, y de US$ 4,5 por hora de sobretiempo en Depto. II.

Se desea saber cómo producir las unidades requeridas de A y B para el próximo mes, al mínimo costo total de fabricación. Plantear esta situación como un PPL.

Desarrollo:

Sólo para efectos de formulación del modelo –antes de intentar su resolución– se definirán las variables de la siguiente manera:

x_{ij}	=	Nº unids. del bien "*i*" a producir en tiempo normal, procesando en Deptos. I y "*j*".
y_{i2}	=	Nº unids. del bien "*i*" a producir en sobretiempo, procesando en Deptos. I y II.

donde $i = 1, 2$ (bienes A y B, en ese orden)
$j = 2, 3$ (Deptos II y III, en ese orden)

Entonces, se tiene el siguiente modelo:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } Z = 18x_{12} + 24y_{12} + 26x_{13} + 33x_{22} + 43{,}5y_{22} + 36x_{23}\\
&\text{s.a}\\
&\quad 2(x_{12} + y_{12} + x_{13}) + 4(x_{22} + y_{22} + x_{23}) \le 1.700\\
&\quad 4x_{12} + 7x_{22} \le 1.000\\
&\quad 10x_{13} + 12x_{23} \le 3.000\\
&\quad 4y_{12} + 7y_{22} \le 500\\
&\quad x_{12} + y_{12} + x_{13} \ge 200\\
&\quad x_{22} + y_{22} + x_{23} \ge 300\\
&\quad x_{12}, y_{12}, x_{13}, x_{22}, y_{22}, x_{23} \ge 0
\end{aligned}
$$

Si los productos tienen características tales que no resulta posible fabricar y vender fracciones de unidad de producto, debiera agregarse la restricción de que cada una de las variables es entera, con lo que se tendría en tal caso un modelo de programación lineal entera.

Cuando se requiera resolver este PPL, se realizará una redefinición conveniente, de manera que las variables para tal efecto sean, por ejemplo, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.

Ejemplo Nº 2: (programación de producción con restricciones financieras)

Una empresa produce sólo 2 bienes (A y B), los cuales requieren procesamiento sólo en 3 departamentos (1, 2 y 3), con las siguientes horas de proceso por unidad:

	Depto. 1	**Depto. 2**	**Depto. 3**
Bien A	3	2	1
Bien B	1	2	3

Se desea programar la producción del próximo mes, sabiéndose que se cuenta con un máximo de 800, 750 y 600 horas de proceso en cada departamento, respectivamente, y que no existen restricciones ni de disponibilidad de otros insumos ni de demanda. Se ha estimado precios de \$ 500 y de \$ 800 para cada unidad a vender de A y B, respectivamente, y costos unitarios variables de producción ascendentes a \$ 200 y \$ 350, respectivamente. No hay inventario de estos productos al comienzo del mes y se cuenta con un saldo inicial de caja (incluyendo cuenta “bancos”) ascendente a \$ 800.000, no habiendo deudas de corto plazo que pagar ni cuentas por cobrar.

Los costos de producción se pagarán totalmente al final del mes de producción, pero los ingresos por ventas se percibirán al final del mes siguiente. Es posible conseguir un préstamo bancario hasta por un máximo de \$ 150.000, pagadero a un mes plazo, a una tasa de interés de 3% mensual. El Banco exige que durante la vigencia del préstamo, la empresa mantenga un coeficiente de “saldo caja / pasivo CP” no inferior a 0,35.

Plantear como un PPL de Max la utilidad mensual.

Desarrollo:

Sean: x_1 = Nº de unidades a producir bien A, fondos propios.
x_1' = Nº de unidades a producir bien A, con préstamo.
x_2 = Nº de unidades a producir bien B, fondos propios.
x_2' = Nº de unidades a producir bien B, con préstamo.

$$\text{Max } Z = 300x_1 + 450x_2 + (300 - 6)x_1' + (450 - 10{,}5)x_2'$$

s.a

$$\begin{array}{rcl}
3x_1 + 3x_1' + x_2 + x_2' & \leq & 800 \\
2x_1 + 2x_1' + 2x_2 + 2x_2' & \leq & 750 \\
x_1 + x_1' + 3x_2 + 3x_2' & \leq & 600 \\
200x_1 + 350x_2 & \leq & 800.000 \\
200x_1' + 350x_2' & \leq & 150.000 \\
\dfrac{800.000 - 200x_1 - 350x_2}{(200x_1' + 350x_2')\,(1{,}03)} & \geq & 0{,}35 \\
x_1, x_1', x_2, x_2' & \geq & 0
\end{array}$$

Ejemplo Nº 3: (programación de producción varios períodos)

Una empresa desea programar la producción y venta de su principal artículo en cada uno de los meses del próximo trimestre, dadas las siguientes estimaciones y consideraciones:

	Mes 1	**Mes 2**	**Mes 3**
Dda. Mínima (por contrato)	80 u	100 u	75 u
Capac. Máx. producción	130 u	150 u	100 u
Costo unitario producción	1.500 $ /u	1.800 $ /u	1.600 $ /u
Precio unitario venta	2.000 $ /u	2.200 $ /u	2.300 $ /u

El costo unitario mensual de almacenaje de una unidad terminada es de aproximadamente $ 30 y al comenzarse este trimestre no habrá unidades en proceso ni unidades almacenadas. Las unidades que se venden en el mismo mes de producción no tienen costo de almacenaje.

Plantear un PPL de maximización que refleje esta situación-problema.

Desarrollo:

Sean x_j = Nº unidades a producir en mes "*j*"
j= 1, 2, 3.
x_j' = Nº unidades que debieran estar en inventario al iniciarse el mes "*j*"
j= 2, 3, 4

$$\begin{aligned}
\text{Max } Z &= \text{Ingreso por ventas - Costo producción - Costo de almacenaje} \\
&= 2.000(x_1 - x_2') + 2.200(x_2 + x_2' - x_3') + 2.300(x_3 + x_3' - x_4') - 1.500x_1 \\
&\quad - 1.800x_2 - 1.600x_3 - 30x_2' - 30x_3' - 30x_4'
\end{aligned}$$

s.a

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2' &\geq 80 \\
x_2 + x_2' - x_3' &\geq 100 \\
x_3 + x_3' - x_4' &\geq 75 \\
x_1 &\leq 130 \\
x_2 &\leq 150 \\
x_3 &\leq 100 \\
x_j, x_j' &\geq 0
\end{aligned}$$

Notas:

i) Sería preferible que en la FO se maximizase el beneficio total trimestral actualizado (lo que implicaría aplicar una tasa de descuento).

ii) Otra posibilidad de definición de variables sería x_{ij} = Nº unidades a producir en mes "*i*" y a vender en mes "*j*".

iii) También se podría definir variables de producción y variables de venta, eliminando las variables explícitas de inventario.

Ejemplo Nº 4: (problema de la dieta)

Considérense dos alimentos: A y B. Cada unidad del alimento A contiene 20 unidades del nutriente I y 60 unidades del nutriente II. Cada unidad del alimento B contiene 30 unidades del nutriente I y 23 unidades del nutriente II. Se ha determinado que los niños en edad de educación básica deben consumir diariamente por lo menos 350 unidades del nutriente I y 700 unidades del nutriente II, cada uno.

Si a cada niño de esa edad, en un área urbana, se le va a hacer entrega de una bolsa que contenga los alimentos A y B, determinar cuántas unidades de A y cuántas unidades de B debiera incluir la bolsa, a un costo total mínimo y cumpliendo los requerimientos nutricionales. El costo de cada unidad de A es \$ 25 y el de cada unidad de B es de \$ 9.

Plantear como un PPL.

Desarrollo:

Sean x_1 = Nº unidades de A que debiera tener c/bolsa
x_2 = Nº unidades de B que debiera tener c/bolsa

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Min } Z = 25x_1 + 9x_2 \\ \text{s.a} \\ \qquad 20x_1 + 30x_2 \geq 350 \\ \qquad 60x_1 + 23x_2 \geq 700 \\ \qquad\qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}}$$

Nota: Si se tratase de 1.000 niños y se contase con fondos de 120.000 \$ /día, se tendría otra restricción:

$$1.000(25x_1 + 9x_2) \leq 120.000$$

o bien

$$25x_1 + 9x_2 \leq 120$$

Ejemplo Nº 5: (problema de la mezcla)

Para producir una determinada aleación metálica que requiere cobre, estaño y cinc, se van a mezclar 3 tipos de aleación de estos 3 metales, disponibles en el mercado: A, B y C.

Cada libra de la aleación final deseada debe contener a lo menos un 20% de cobre, no más de un 45% de estaño y la proporción de cinc debe ser un 30%. Las características de las aleaciones A, B y C son:

	A	**B**	**C**
% Cobre	30%	10%	70%
% Estaño	50%	60%	10%
% Cinc	20%	30%	20%
Costo por libra	$ 130	$ 110	$ 90

Plantear como un PPL la situación-problema de determinar los porcentajes de A, B y de C que debe contener 1 libra de aleación deseada.

Desarrollo:

Sean x_1 = proporción de A en 1 libra de aleación
x_2 = proporción de B en 1 libra de aleación
x_3 = proporción de C en 1 libra de aleación

$$\begin{array}{l}
\text{Min } Z = 130x_1 + 110x_2 + 90x_3 \\
\text{s.a} \\
\quad 0{,}30x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}70x_3 \geq 0{,}20 \\
\quad 0{,}50x_1 + 0{,}60x_2 + 0{,}10x_3 \leq 0{,}45 \\
\quad 0{,}20x_1 + 0{,}30x_2 + 0{,}20x_3 = 0{,}30 \\
\quad x_1 + x_2 + x_3 = 1{,}00 \\
\quad x_j \geq 0
\end{array}$$

Ejemplo Nº 6: (problema de transporte)

Una empresa tiene 3 fábricas y 2 tiendas mayoristas. Los datos de producción semanal del bien A en cada fábrica, los requerimientos semanales del bien A en cada tienda y el costo unitario de transporte desde cada fábrica hasta cada tienda son:

	Fábrica			
	1	**2**	**3**	**Dda. Mínima**
Tienda 1	15 $/u	10 $/u	8 $/u	500 u
Tienda 2	25	50	34	300 u
Producción	280 u	400 u	350 u	

Plantear como un PPL, para minimizar el costo total semanal de transporte.

Desarrollo:

Sean x_{ij} = Nº unidades a transportar desde fábrica "*i*" hasta tienda "*j*"
$i = 1, 2, 3 \qquad j = 1, 2$

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } Z = 15x_{11} + 10x_{21} + 8x_{31} + 25x_{12} + 50x_{22} + 34x_{32} \\
&\text{s.a} \\
&x_{11} + x_{12} \le 280 \\
&x_{21} + x_{22} \le 400 \\
&x_{31} + x_{32} \le 350 \\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 500 \\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} \ge 300 \\
&x_{ij} \ge 0
\end{aligned}
$$

Notas:

i) La forma general de este problema es ¿cómo y cuántas unidades de c/bien deben llevarse desde un conjunto de orígenes (por ej.: fábricas) hasta un conjunto de destinos (por ej.: tiendas mayoristas), minimizando el costo total de transporte?

ii) Si se trata de asignar "*n*" elementos o recursos a un conjunto de "*n*" destinos, de tal forma que cada elemento se asocie con uno y sólo uno de los destinos y viceversa (por ejemplo, asignar trabajadores a máquinas ó vendedores a territorios de ventas), se tiene un caso especial de problema de transporte llamado problema de asignación.

Ejemplo Nº 7: (problema del recorte)

Una empresa manufacturera de papeles debe surtir un pedido consistente en 800 rollos de papel de 30 cms. de ancho, 500 rollos de papel de 45 cms. de ancho y 1.000 rollos de papel de 56 cms. de ancho. En este momento, la empresa cuenta solamente con rollos de 108 cms. de ancho y debe decidir cómo cortarlos para surtir el pedido con un mínimo desperdicio de papel.

Desarrollo:

Sea x_j = Nº de rollos de 108 cms. que se cortan en la modalidad "*j*".
j= 1,2,3,4,5.

MODALIDAD DE CORTE

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Rollos de 30 cms.	3	2	1	0	0
Rollos de 45 cms.	0	1	0	2	1
Rollos de 56 cms.	0	0	1	0	1
Pérdida por recorte (cms)	18	3	22	18	7

$$\text{Min } Z = 18x_1 + 3x_2 + 22x_3 + 18x_4 + 7x_5$$

s.a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geq 800 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 &\geq 500 \\ x_3 + x_5 &\geq 1.000 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo Nº 8: (problema de selección de portfolio)

La corporación Gamma quiere invertir la suma de US$ 1.000.000 en el próximo año fiscal.

Para tomar una decisión acertada, los ejecutivos de la mencionada organización han pedido una completa investigación de los índices de rentabilidad promedio, en los últimos años, para las distintas categorías de valores de inversión. La información relevante, proveniente de un estudio de "portfolio", es la siguiente:

CATEGORÍA DE LA INVERSIÓN	RETORNO REAL ESPERADO ANUAL	FACTOR DE RIESGO (β)
Acciones Comunes	15%	1,6
Cuotas de fondos mutuos	12%	1,0
Debentures	10%	0,5
Bonos de Gobierno	5%	0
Cuentas de ahorro	8%	0,1

La política de inversión que ha seguido Gamma en los últimos años es bastante clara: la inversión en acciones y en cuotas de fondos mutuos no debe ser mayor que un 30% del total de las inversiones; la inversión en Bonos de Gobierno no debe ser inferior a la inversión en cuentas de ahorro; la inversión en debentures y bonos de Gobierno no debe exceder el 50% del total de las inversiones; además, por ley, la inversión en bonos gubernamentales debe superar el 25% del total de las inversiones.

En cuanto a riesgo, la corporación no permite que el portfolio de valores escogidos tenga un factor de riesgo ponderado mayor que 1,0.

Si se puede suponer que los retornos reales esperados y los factores de riesgo permanecen constantes para el horizonte de planeación del problema, entonces plantear un modelo de programación lineal que permita obtener el portfolio de inversión que optimice el retorno esperado de la corporación y simultáneamente no viole su política de inversión.

Desarrollo:

Sea x_j = US$ a invertir en alternativa "*j*".

$j = 1,2,3,4,5.$

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max } Z = 0{,}15x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}10x_3 + 0{,}05x_4 + 0{,}08x_5 & & \\
\text{s.a} & & \\
x_1 + x_2 & \leq & 0{,}3\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\right) \\
x_4 & \geq & x_5 \\
x_3 + x_4 & \leq & 0{,}5\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\right) \\
x_4 & > & 0{,}25\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\right) \\
1{,}6x_1 + x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}1x_4 & \leq & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & \leq & 1.000.000 \\
x_j & \geq & 0
\end{array}
$$

Sólo restaría ordenar, para presentarlo en formato general de PPL.

Ejemplo Nº 9: (problema de selección de medios)

La empresa XAB cuenta con M$ 30.000 para realizar publicidad al producto Q durante el próximo semestre. Los medios de publicidad considerados son: TV, radio, diarios y revistas. El objetivo es maximizar la exposición publicitaria del producto Q durante el semestre (es decir, el nº de veces que una persona promedio en el mercado objetivo estaría expuesta al mensaje publicitario).

Se cuenta con estimaciones de la exposición media por cada M$ 1 desembolsado en publicidad en cada medio y se ha decidido respecto a las cantidades máximas a desembolsar en cada medio.

Medio Publicitario	Exposición por cada M$ 1	Desembolso Máximo
TV	9	M$ 18.000
Radios	5	5.000
Diarios	6	9.000
Revistas	4	10.000

Además, se ha especificado que el desembolso en publicidad televisiva no debe ser superior al desembolso conjunto en los restantes medios.

Desarrollo:

Sea x_j = M$ a desembolsar en publicidad del producto Q, en medio "*j*", en el semestre.
$j = 1,2,3,4$

$$
\begin{array}{l}
\text{Max } Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\
\text{s.a} \\
\begin{array}{rcr}
x_1 & \leq & 18.000 \\
x_2 & \leq & 5.000 \\
x_3 & \leq & 9.000 \\
x_4 & \leq & 10.000 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \leq & 30.000 \\
-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \geq & 0 \\
x_j & \geq 0 &
\end{array}
\end{array}
$$

Ejemplo Nº 10: (problema de inversiones)

Un inversionista tiene las actividades A y B que producen dinero, disponibles al principio de cada uno de los cinco años siguientes (llamémoslos años 1 al 5). Cada peso invertido en A al principio del año 1, retribuye $ 1,40 (una utilidad de $ 0,40) dos años más tarde (en el instante necesario para la reinversión inmediata). Cada peso invertido en B al principio del año 1, retribuye $ 1,70 tres años más tarde.

Además, en un instante futuro, estarán disponibles cada una de las actividades C y D. Cada peso invertido en C al principio del año 2, retribuye $ 1,90 al final del año 5. Cada peso invertido en D al principio del año 5, retribuye $ 1,30 al final del año 5.

El inversionista empieza con $ 20.000. Desea saber cuál plan de inversiones maximiza la cantidad de dinero que puede acumular al principio del año 6. Plantéese un modelo de programación lineal para este problema.

<u>Desarrollo</u>:

	Año 1		Año 2		Año 3		Año 4		Año 5	
0		**1**		**2**		**3**		**4**		**5**
A_0		A_1		A_2		A_3				
B_0		B_1		B_2						
		C_1						D_4		
N_0		N_1		N_2		N_3		N_4		

Donde N_j = \$ no invertidos al principio del año "j"
$j = 0,1,2,3$

Se desea maximizar la cantidad de dinero acumulado al momento 5 (comienzo año 6).

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\text{Max } Z = 1,9C_1 + 1,7B_2 + 1,4A_3 + 1,3D_4 \\
\text{s.a} \\
\begin{array}{lllll}
A_0 + B_0 & + N_0 & = 20.000 & & \\
A_1 + B_1 + C_1 & + N_1 & = & & N_0 \\
A_2 + B_2 & + N_2 & = 1,4A_0 & & + N_1 \\
A_3 & + N_3 & = 1,4A_1 + 1,7B_0 & & + N_2 \\
D_4 & & = 1,4A_2 + 1,7B_1 & & + N_3 \\
A_j & & \geq 0 & j = 0,1,2,3 & \\
B_j & & \geq 0 & j = 0,1,2 & \\
C_1 & & \geq 0 & & \\
D_4 & & \geq 0 & & \\
N_j & & \geq 0 & j = 0,1,2,3 &
\end{array}
\end{array}
}
$$

Ejemplo Nº 11: (problema de distribución de carga)

Una Cía. naviera posee una dotación de 3 barcos para el transporte de carga general. Cada uno de estos barcos posee 3 bodegas: una en la proa, otra en el centro y la última en la popa. Los límites de capacidad de estas bodegas son los siguientes:

Bodega	Peso (tons)	Volumen (m^3)
Proa	2.000	100.000
Centro	3.000	135.000
Popa	1.500	30.000

Las siguientes cargas están disponibles, pudiendo aceptarse la totalidad o parte de ellas, contándose con sólo uno de los barcos para ello:

Artículo	Cantidad (tons)	Volumen (m^3/ ton)	Utilidad ($ /ton)
A	6.000	60	12
B	4.000	50	16
C	2.000	25	10

Para mantener la línea de flotación del barco, el peso en cada bodega debe ser proporcional a su capacidad en toneladas. El problema es cómo distribuir la carga en el barco para obtener el máximo de utilidad total. Plantear como PPL.

Desarrollo:

Sea x_{ij} = toneladas carga "*i*" a almacenar en bodega "*j*".

i = 1→ carga A; 2→ carga B; 3→ carga C

j = 1→ Proa; 2→ Centro; 3→ Popa

$$\text{Max } Z = 12\sum_{j=1}^{3} x_{1j} + 16\sum_{j=1}^{3} x_{2j} + 10\sum_{j=1}^{3} x_{3j}$$

s.a. las siguientes restricciones:

CARGA DISPONIBLE

1)
2)
3)

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq \begin{bmatrix} 6.000 \\ 4.000 \\ 2.000 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i = 1 \\ i = 2 \\ i = 3 \end{matrix}$$

CAPACIDAD EN PESO

4)
5)
6)

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \leq \begin{bmatrix} 2.000 \\ 3.000 \\ 1.500 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} j = 1 \\ j = 2 \\ j = 3 \end{matrix}$$

CAPACIDAD EN ESPACIO O VOLUMEN

7)
8)
9)

$$60x_{1j} + 50x_{2j} + 25x_{3j} \leq \begin{bmatrix} 100.000 \\ 135.000 \\ 30.000 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} j = 1 \\ j = 2 \\ j = 3 \end{matrix}$$

LINEA DE FLOTACION (una de ellas es redundante)

10) $$3.000\sum_{i=1}^{3} x_{i1} - 2.000\sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 0$$

11) $$1.500\sum_{i=1}^{3} x_{i1} - 2.000\sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 0$$

12) $$1.500\sum_{i=1}^{3} x_{i2} - 3.000\sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 0$$

13) $x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3$

<u>Nota</u>: Las restricciones 10), 11) y 12) han sido expresadas en la forma convencional.

<u>Ejemplo Nº 12</u>: (problema de arrendamiento)

Una compañía necesita arrendar espacio de almacenamiento durante los próximos 5 meses. La compañía sabe con precisión cuánto espacio requerirá en cada uno de estos meses. Sin embargo, como estos requerimientos de espacio son bastante diferentes, es posible que resulte más económico arrendar únicamente la cantidad necesaria cada mes, sobre una base de mes a mes. Por otra parte, el costo adicional por espacio arrendado para meses adicionales es mucho menor que para el primer mes, de modo que puede ser menos caro arrendar la cantidad máxima necesaria para los 5 meses completos. Otra opción es el punto de vista intermedio de cambiar la cantidad total de espacio arrendado (agregando un nuevo arriendo y teniendo un vencimiento de arriendo anterior, o bien, con el vencimiento de un arriendo anterior) al menos una vez, pero no en todos los meses.

El requerimiento de espacio (en miles de pies cuadrados) y los costos de arrendamiento (en cientos de dólares) para los diversos períodos de arrendamiento son:

Mes	Espacio Requerido
1	30 Mpies^2
2	20
3	40
4	10
5	50

Período de Arrendamiento	Costo ($ / 1.000 pies^2)
1 mes	450
2	700
3	950
4	1.150
5	1.300

Desarrollo:

Sea x_{ij} = espacio a arrendar (miles pies^2) en mes "*i*" por un período de "*j*" meses.

$$i = 1,2,3,4,5 \qquad j = 1,2,3,4,5 \qquad j \leq (5 - i + 1)$$

$$\begin{aligned}
\text{Min } Z = {} & 450(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}) + 700(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) \\
& + 950(x_{13} + x_{23} + x_{33}) + 1.150\,(x_{14} + x_{24}) + 1.300x_{15}
\end{aligned}$$

s.a

$$\begin{aligned}
& x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 30 \\
& x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \geq 20 \\
& x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 40 \\
& x_{14} + x_{15} + x_{23} + x_{24} + x_{32} + x_{33} + x_{41} + x_{42} \geq 10 \\
& x_{15} + x_{24} + x_{33} + x_{42} + x_{51} \geq 50 \\
& x_{ij} \geq 0
\end{aligned}$$

3.3) SUPUESTOS DEL MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Sea el siguiente problema de programación lineal (PPL):

$$
\begin{array}{l}
\text{Max } \; Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots\cdots + c_n x_n \\
\text{s.a} \\
\qquad \begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n & \le & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n & \le & b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n & \le & b_m \\
x_j & \ge & 0
\end{array}
\end{array}
$$

En general, este PPL podría representar una situación típica de producción y venta de “*n*” bienes, con “*m*” restricciones correspondientes a disponibilidad máxima de “*m*” insumos, con una función objetivo de Max beneficios (donde los c_j son las contribuciones unitarias al beneficio por parte de los respectivos bienes).

Entonces, los supuestos fundamentales de este modelo son:

a) Linealidad
b) Divisibilidad
c) Certidumbre

a) Linealidad

Evidentemente, éste es el supuesto fundamental del modelo, el cual involucra 2 supuestos subyacentes: proporcionalidad en cada actividad individual e independencia entre actividades.

a.1) Proporcionalidad en cada actividad individual

En cada actividad (producción de cada bien) debe cumplirse que:

- Si para producir una unidad del bien “*j*” se requiere de a_{ij} unidades de insumo “*i*”, entonces para producir x_j unidades del bien “*j*” se requiere de $a_{ij}x_j$ unidades de insumo “*i*”.
- Si el beneficio asociado a la venta de una unidad del bien “*j*” es c_j, entonces el beneficio total asociado a la venta de x_j unidades del bien “*j*” es c_jx_j.

Si bien lo anterior parece a primera vista muy lógico, no siempre ello se cumple en casos reales para todo nivel de actividad, debido a problemas de inversión inicial y a la existencia de rendimientos a escala.

El problema de inversión inicial se refiere al hecho de que para iniciar la producción de un artículo nuevo, puede que se requiera efectuar una inversión inicial. Si K es el costo de esa inversión inicial, se tendrá que para $x_j > 0$ el beneficio de la venta de x_j unidades será igual a $(c_j x_j - K)$, pero si $x_j = 0$ se tendrá un beneficio igual a 0, siendo el bien "*j*" aquel para el cual se requiere tal inversión inicial.

Los rendimientos a escala se refieren al hecho de que tanto los beneficios unitarios como los costos unitarios de tipo variable pueden estar asociados con el nivel de producción o de venta (nivel de actividad). Puede haber rendimientos crecientes o rendimientos decrecientes, según la escala de actividad.

a.2) <u>Independencia entre actividades individuales</u>

No existen interacciones entre actividades, de tal forma que la utilización total de cada insumo y los ingresos totales, costos totales o utilidades totales son la suma de los correspondientes a cada actividad (suma de los $a_{ij} x_j$ ó suma de los $c_j x_j$). En síntesis, ello significa que no se gana ni se pierde nada adicional por la fabricación o la venta simultánea de dos o más productos.

Esto no siempre se cumple en situaciones reales, porque existen casos en que se producen ahorros (desahorros) de insumos al utilizar procesos comunes de producción o se ven afectadas las utilidades en el caso de productos sustitutos o competidores.

Si el supuesto de linealidad falla, debiera considerarse el uso de Programación No Lineal; no obstante, en muchos casos podrá asumirse linealidad para los niveles de actividad relevantes y, en otros casos, existirá la posibilidad de replantear el problema en una forma adecuada para que se cumpla este supuesto. Al respecto, debe acotarse que los algoritmos de resolución en Programación Lineal son mucho más poderosos que en Programación No Lineal.

b) <u>Divisibilidad</u>

Es posible fabricar o vender una fracción de unidad de producto.

En caso contrario se debiera considerar el uso de Programación Lineal Entera. Al respecto, cabe recordar que el simple redondeo de una solución fraccionaria al entero más próximo, puede arrojar una solución infactible con los insumos de que se dispone, o bien, una solución bastante alejada de la verdadera solución óptima entera.

c) Certidumbre

Los valores de los parámetros del modelo son conocidos, es decir, se conocen los valores de a_{ij}, c_j, b_i.

En realidad, los valores de a_{ij}, c_j, b_i que se utilizan al formular el PPL son sólo estimaciones. Sin embargo, el análisis de sensibilidad o post-optimal permite conocer el comportamiento de la solución óptima, ante variaciones en los valores de esos parámetros.

4. EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio Nº 1:

La empresa Shogun S.A. está fundamentalmente dedicada a la producción de lentes para máquinas fotográficas, luego de que intentase infructuosamente entrar en el mercado de las máquinas fotográficas de alta sofisticación técnica.

Aprovechando la experiencia de la empresa en el rubro, ha decidido especializarse en lentes de alta calidad, que le permitan estar entre los principales exportadores japoneses de lentes para máquinas del tipo reflex.

En la actualidad, fabrica tres modelos distintos:

- el modelo “KIKU”, zoom de 100 - 200 mm. con f. 5,6
- el modelo “OMI”, zoom de 35 - 105 mm. con f. 3,5
- el modelo “ANGIN”, zoom de 100 - 300 mm. con f. 5,6

En su producción, la empresa utiliza dos tipos de insumos (A y B), de los cuales dispone de 4.000 y 6.000 unidades respectivamente.

Los requerimientos unitarios de insumos son:

INSUMO	KIKU	OMI	ANGIN
A	2	3	5
B	4	2	7

El tiempo destinado a producir cada unidad del modelo KIKU es el doble del destinado al modelo OMI, y el triple del dedicado al modelo ANGIN. Los operarios de la empresa pueden llegar a producir un equivalente a 1.500 lentes KIKU mensualmente.

El departamento de Marketing ha realizado algunas proyecciones de las ventas futuras, y ha indicado que la demanda mínima para los tres modelos es de 200, 200 y 150 unidades mensualmente, respectivamente.

Los precios de cada modelo y sus costos unitarios, expresados en dólares, son los siguientes:

MODELO	PRECIO VENTA	COSTO PRODUCCIÓN
KIKU	US$ 120	US$ 90
OMI	100	80
ANGIN	130	80

Formular un modelo de programación lineal que permita determinar la producción de cada tipo de zoom, tal que se optimice el resultado operacional de la empresa.

Ejercicio Nº 2:

Una embotelladora debe decidir cuánto producir de cada uno de sus cuatro productos en el próximo mes. Los productos en cuestión son bebidas de fantasía (Koka-Kola, Fhanta, Eight Up y Zprite), para las cuales el departamento de Comercialización ha realizado estimaciones de precio y de cantidad demandada máxima mensual, para el próximo mes:

Marca	Cantidad Demandada	Precio de venta
Koka-Kola	Sin límite	$ 50,5
Fhanta	80.000 botellas	51,5
Zprite	60.000 botellas	50,0
Eight Up	72.000 botellas	52,4

La Koka-Kola requiere por cada botella 3 minutos de proceso, la Fhanta requiere 2,5 minutos, la Eight Up y la Zprite requieren 3,8 minutos cada una.

La máquina selladora envía 14 botellas de Kola-Kola cada 2 horas, 12 botellas de Fhanta cada hora, 27 botellas de Zprite cada 3 horas y 30 botellas de Eight Up cada 3 horas.

Se contratan 1.500 horas de "reparto" y se sabe que en 1 hora de reparto se logra colocar 300 botellas de Koka-Kola, ó 200 de Fhanta, ó 180 de Zprite ó 200 de Eight Up.

Las horas disponibles de "proceso" mensual son 500 horas y las horas disponibles de "sellado" son 2.000 horas mensuales. Los costos por hora son:

Costo por hora "proceso"	$ 52
Costo por hora "sellado"	$ 47
Costo por hora "reparto"	$ 55

Al comienzo del próximo mes no habrá unidades en inventario de productos en proceso y productos terminados. No obstante, en consideración a nuevas políticas de la empresa, se desea terminar el próximo mes con 500 botellas de Koka-Kola, 400 de Fhanta, 200 de Zprite y 350 de Eight Up procesadas y selladas. Además, durante el mes en cuestión se debe cumplir con la entrega de 1.200 botellas de Koka-Kola, 600 de Zprite y 450 de Eight Up, las que corresponden a ventas del mes anterior, ya pagadas al contado.

No hay restricción de fondos, realizándose todos los pagos en el mes de producción con fondos propios y vendiéndose todo al contado.

Plantear un PPL relacionado con la situación-problema de programar la producción de cada producto para el próximo mes. Especifique claramente sus supuestos (de ser ellos necesarios).

Ejercicio Nº 3:

El Royal Club de Mónaco ofrecerá un almuerzo de gala en cada uno de los siete días de la Semana de la Primavera. Las reservas de mesas ya han sido realizadas, sabiéndose el número de mesas que serían ocupadas en cada día.

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
75	90	105	120	105	135	150

En esta oportunidad, habrá que adquirir manteles nuevos, ya que cada mesa lucirá un mantel especialmente diseñado para estas celebraciones.

Cualquier compra de un mantel nuevo puede ser realizada el mismo día en que será usado, a un precio de $ 1.900 cada uno, pagaderos al contado. Además, los manteles sucios pueden ser mandados a lavar a un servicio rápido que demora dos días la entrega y cobra $ 800 por mantel, pagaderos al momento del envío a lavado, o bien, pueden ser mandados a lavar a un servicio más lento que demora 3 días la entrega y cobra $ 500 por mantel, pagaderos al momento del envío a lavado.

En el contexto de la semana de interés, la administración del Club desea saber -formulando y resolviendo un PPL- cuántos manteles debe adquirir en cada día y cuántos debe enviar a lavar por cada tipo de servicio en cada día, minimizando el costo total asociado a la adquisición y lavado de manteles de la semana en cuestión.

Puesto que la administración del Club sabe que el dinero tiene un valor asociado a la variable “tiempo”, aun cuando no incluirá explícitamente este aspecto en la formulación del PPL, intentará adquirir y/o lavar cada día la mínima cantidad posible de manteles para cumplir lo requerido.

Formular el PPL, siendo muy preciso en la definición de las variables y en la formulación de la FO y de las restricciones.

Ejercicio Nº 4:

Contestar las siguientes preguntas, definiendo claramente las variables en cada caso.

4.1) En un determinado departamento fabril se realiza una operación de manufactura requerida por cada uno de los tres principales productos (A, B, C) de la Cía. JVC. Se sabe que si en el próximo mes se dedicase la totalidad de la capacidad de este departamento a la fabricación de sólo uno de estos productos, podría procesarse completamente 3.000 unidades de A ó 2.500 unidades de B ó 1.500 unidades de C en tal departamento. No obstante, lo habitual es que se procesen unidades de los tres productos.

Formular, entonces, la restricción de capacidad mensual de proceso en este departamento para los tres productos señalados.

4.2) Sean tres parcelas (A, B, C) similares en productividad, con áreas utilizables de 50, 32 y 85 hectáreas, respectivamente. Se desea saber cuántas hectáreas plantar en cada parcela, de cada uno de tres cultivos posibles, dado un determinado conjunto de restricciones. Una de tales restricciones indica que el % de área cultivable aprovechada debe ser el mismo en cada parcela.

Formular la restricción señalada.

4.3) Sean dos proyectos de inversión no divisibles, de tal forma que respecto de cada uno de ellos sólo cabe la aceptación total o el rechazo total. Formular la restricción según la cual ambos proyectos son mutuamente excluyentes y que necesariamente debe realizarse uno de ellos.

4.4) Se cuenta con $ 1.300.000 disponibles para invertir entre 9 alternativas financieras divisibles (por ejemplo, acciones de S.A., bonos, etc.). Se ha estimado para cada alternativa, la tasa de rentabilidad anual por cada $ que se invierta en ella, de tal forma que r_j sería la rentabilidad anual estimada para la alternativa "*j*".

Las políticas de inversión son:

- invertir como máximo $ 300.000 en cada alternativa.
- si se decide invertir en una determinada alternativa, entonces se debe invertir por lo menos $ 100.000 en ella.

Plantear un modelo matemático que refleje la situación-problema señalada, dado un objetivo de Max la ganancia total anual en $.

Ejercicio Nº 5:

Una empresa debe decidir un programa de producción en un horizonte de planificación de 3 períodos. Los costos de producción, que deben pagarse en efectivo al término del período en que se haya incurrido en ellos, ascienden a M$ 25 por unidad en cada período.

La empresa fabrica un solo producto, del cual es posible producir 25, 25 y 30 unidades, en los períodos 1, 2 y 3, respectivamente. Al término del período en que la producción pasa almacenada, se debe pagar costos de almacenaje por un monto de M$ 3 la unidad.

La capacidad de venta es de 20 unidades en el período 1, de 15 unidades en el período 2 y de 20 unidades en el período 3. El precio de venta por unidad es de M$ 29, M$ 30 y M$ 31, para los períodos 1, 2 y 3, respectivamente.

La cobranza de las ventas se efectúa un período después del período en que se realiza la venta y este efectivo se encuentra disponible para desembolsos en costos de producción en el período de cobranza.

El saldo de caja inicial es de M$ 400. Sin embargo, es posible tomar un préstamo hasta M$ 200 al término de cada uno de los 2 primeros períodos, al 6% de interés simple por período, a condición de que se mantenga M$ 1 en el saldo de caja por cada M$ 3 que se toman en préstamo. Estos préstamos son de duración de un período solamente, no pudiendo adeudarse cantidad alguna más allá del tercer período.

Plantear como un PPL la situación-problema de programar la producción y venta para cada uno de los 3 períodos.

Ejercicio Nº 6:

Se va a evaluar una cartera de "*n*" proyectos de inversión con la misma vida útil, de tal forma que se desea determinar en cuáles proyectos invertir y/o cuánto invertir en cada uno de ellos, con la finalidad de maximizar una determinada función de beneficio económico, en una situación de limitación de fondos.

Sea, en general, x_j = fracción o proporción a aceptar (o realizar) del proyecto "*j*".

6.1) Suponiendo que en esta cartera los proyectos 4 y 7 (j=4 y j=7) son perfectamente divisibles, tales que se puede decidir invertir en el proyecto completo o en una fracción de él (por ejemplo: acciones, bonos).

a) Formular las restricciones matemáticas básicas para cada una de las variables x_4 y x_7.

b) Alguien sugiere que si además los proyectos 4 y 7 son mutuamente excluyentes, debiera formularse las siguientes restricciones, en reemplazo de las restricciones de a):

$$0 \leq x_4 + x_7 \leq 1$$
$$x_4 \geq 0$$
$$x_7 \geq 0$$

Analizar esta sugerencia.

6.2) Suponiendo que todos los demás proyectos en cartera no son divisibles, de tal forma que respecto de c/u de ellos sólo cabe la aceptación o el rechazo, determinar cuál de las restricciones que se listan a continuación corresponde a c/u de los siguientes casos:

a) Los proyectos 1 y 2 son mutuamente excluyentes.

b) La aceptación del proyecto 2 depende de la aceptación previa del proyecto 1.

$$\begin{array}{lll} x_1 + x_2 \leq 1 & x_1 - x_2 \geq 0 & -x_1 + x_2 < 1 \\ x_1 + x_2 = 0 & x_1 - x_2 = 1 & x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 0 & x_1 + x_2 = 1 & -x_1 + x_2 \geq 0 \end{array}$$

Explicar claramente, desde la definición básica de las variables.

6.3) Supóngase que ninguno de los "n" proyectos en cartera es divisible, habiéndose determinado para c/u de ellos el Valor Actual Neto (VAN).

Se va a plantear un modelo de programación matemática, con una función objetivo consistente en maximizar el VAN de la inversión total.

Si VAN_j = Valor Actual Neto del *j*-ésimo proyecto, se pide:

a) Formular la función objetivo.

b) Explicar claramente si el modelo que se formularía podría ser, en lo esencial, un modelo de programación lineal.